GROUPE B

MATHÉMATIQUES

I

Soit y et z deux fonctions complexes de l'entier p, solutions du système

$$(1) \qquad \begin{cases} y_{p+1} = y_p + z_p + k\,(s_p - y_p) \\ z_{p+1} = z_p + 2k\,(s_p - y_p) \end{cases}$$

avec s fonction complexe donnée, k réel strictement compris entre 0 et 8 et la notation $w_p = w\,(p)$ pour toute fonction w de l'entier p.

1° Montrer qu'une fonction y solution du système peut être caractérisée par la donnée de deux nombres complexes.

2° Dans le cas particulier $s_p = 0$ et à l'aide d'expressions du type λ^p avec λ complexe, trouver deux solutions y non proportionnelles.

3° Trouver une solution y dans chacun des deux cas particuliers suivants :

a. $s_p = p$

b. $s_p = s^p$ avec s complexe donné non nul.

4° Montrer que les résultats précédents permettent d'obtenir la solution générale dans le cas $s_p = a + bp + cs^p$ avec a, b, c, s complexes donnés (s non nul).

Un automobiliste, dont la position sera notée y, souhaite en suivre un autre, de position x, à une distance δ strictement positive. Pour cela, de temps à autre (intervalle de temps τ strictement positif), il choisit son accélération ou freinage en fonction de l'écart qui les sépare.

Schématisation mathématique du problème : Les positions sont des fonctions réelles du temps t, dérivables et à dérivée continue. Sur tout intervalle ouvert de la forme $]p\,\tau\,,(p+1)\,\tau[$ avec p entier, y est deux fois dérivable et de dérivée seconde

$$(2) \qquad y''(t) = 4\,\alpha^2\,(x_p - y_p - \delta)$$

avec α strictement positif et la notation $f_p = f(p\,\tau)$ pour toute fonction f de t.

1° On supposera dans la suite que les coefficients α, δ, τ sont tels que tout choc soit impossible dans l'intervalle $[p\,\tau,(p+1)\,\tau]$ si le premier automobiliste, de position x, a une vitesse constante et si les deux vitesses sont égales à l'instant $t = p\,\tau$. En déduire une majoration de $\alpha^2\,\tau^2$.

2° Le mouvement du premier automobiliste étant supposé connu, montrer que le mouvement du deuxième est complètement déterminé par la donnée de sa position et de sa vitesse à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire y_0 et y'_0.

3° On suppose que le premier automobiliste a une vitesse constante et qu'à partir de l'instant $t = 0$, le deuxième décide de le suivre selon la règle (2). Montrer que :

a. Pour p positif, $x_p - y_p$ peut se mettre sous la forme

$$\delta + (\sqrt{1 + 2\,\alpha^2\,\tau^2})^p\,(u \sin p\theta + v \cos p\theta)$$

avec $\cos\theta = \dfrac{1 - \alpha^2\,\tau^2}{\sqrt{1 + 2\,\alpha^2\,\tau^2}}$ et u, v constantes réelles caractéristiques du mouvement considéré.

b. On peut trouver un nombre réel θ_0 indépendant de τ, strictement compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$ et satisfaisant en particulier à : quels que soient p_0 et k entiers positifs, il existe p et q entiers positifs avec p supérieur à p_0 et $p\theta - 2\,q\pi$ dans l'intervalle $\left[(2k+1)\,\dfrac{\pi}{4} - \theta_0\,,\,(2k+1)\,\dfrac{\pi}{4} + \theta_0\right]$.

. . . / . . .

E.N.S. ULM ET SEVRES 1961

c. Il n'existe qu'un seul couple $\Delta_1 = (y_0, y'_0)$ tel que, pour tout t positif, il n'y ait pas de choc entre les deux véhicules.

d. Quel que soit ε strictement positif, il existe η strictement positif et indépendant de τ tel que, pour (y_0, y'_0) appartenant au disque Δ_2 de centre Δ_1 et de rayon η, on ait $|u| + |v| \leqslant \varepsilon$.

e. On peut choisir η strictement positif tel que, pour (y_0, y'_0) différent de Δ_1 mais appartenant à Δ_2, l'instant du choc tende vers l'infini quand τ tend vers zéro (avec α, δ, y_0, y'_0 fixés).

III

Compte tenu du résultat précédent, on étudie le cas où le deuxième automobiliste surveille le premier en permanence et adopte la règle

$$y''(t) = \gamma^2 (x(t) - y(t) - \delta) \tag{3}$$

avec γ strictement positif et pour le reste les notations et hypothèses de II.

1° On suppose que le premier automobiliste a une vitesse constante et qu'à partir de l'instant $t = 0$, le deuxième décide de le suivre selon la règle (3). Pour γ, δ, x_0, x'_0 donnés, quel est dans le plan l'ensemble Δ_3 des couples de valeurs (y_0, y'_0) assurant l'absence de choc pour tout t positif ?

2° Le deuxième automobiliste, parti avec (y_0, y'_0) dans Δ_3, est suivi par un troisième qui adopte derrière lui la règle de conduite (3). Montrer que :

a. Si le deuxième a une vitesse non constante, il sera heurté par le troisième.

b. Il peut ne pas y avoir de choc si le deuxième et le troisième choisissent des valeurs différentes pour le coefficient γ.

3° Plus généralement, on considère une file de voitures dans laquelle le $n^{\text{ième}}$ conducteur adopte la règle de conduite (3) par rapport au $(n-1)^{\text{ième}}$ avec des coefficients γ et δ spécifiques, soit γ_n et δ_n pour $n > 1$. Le premier est supposé avoir une vitesse constante. S'ils existent on note p le rang du premier conducteur dont la vitesse n'est pas constante et q le rang du premier qui, derrière le $p^{\text{ième}}$, possède le même coefficient γ que lui, soit $\gamma_q = \gamma_p$. Montrer que, si aucun autre choc n'intervient avant, quelles que soient les valeurs des δ_n, le $(q-1)^{\text{ième}}$ véhicule sera heurté par son suivant.

REMARQUE : *Les rapports entre le sujet traité, la physique des vibrations et la philosophie de la responsabilité sont intéressants mais ne font pas partie du problème posé.*

Tournez la page S. V. P.

On étudie le cas où le deuxième automobiliste est plus prudent et tient compte, de temps à autre, non seulement de l'écart qui le sépare du précédent mais aussi de leur vitesse relative, selon la règle

$$y''(t) = \tfrac{1}{4}\alpha^2 (x_p - y_p - \delta) + 2\beta^2 (x'_p - y'_p) \quad \text{pour} \quad t \in]p\tau, (p+1)\tau[\tag{4}$$

avec β positif et pour le reste les notations de II. On pourra adapter à cette nouvelle situation les idées et techniques utilisées précédemment.

1° On supposera dans la suite que les coefficients α, β, δ, τ sont tels que tout choc soit impossible dans l'intervalle $[p\tau, (p+1)\tau]$ si le premier automobiliste a une vitesse constante et si, à l'instant $t = p\tau$, la vitesse du deuxième est inférieure ou égale à celle du premier.

En déduire des majorations de $\alpha^2\tau^2$ et $\beta^2\tau$.

2° On suppose que le premier véhicule a une vitesse constante.

a. Écrire les conditions définissant le sous-ensemble D du plan tel que, pour $(\alpha^2\tau^2, \beta^2\tau)$ appartenant à D, la fonction $x(t) - y(t)$ reste bornée pour t positif.

b. Préciser D.

3° Montrer que, avec le premier automobiliste à vitesse constante et $(\alpha^2\tau^2, \beta^2\tau)$ dans D à l'exclusion des courbes limitant cet ensemble,

a. $\lim_{t \to +\infty} (x(t) - y(t)) = \delta$.

b. Il est possible d'avoir une file (avec des valeurs α_n et β_n pour les coefficients α et β du $n^{\text{ième}}$ conducteur) dont les véhicules n'ont pas des vitesses constantes, ne se heurtent pas et avec une distance entre véhicules qui tend vers δ quand t tend vers l'infini.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail